

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos(tx) dx = \frac{1}{1+t^2}$$

Also: l.S. von (\*) =  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Vergleich  $\Rightarrow$  Beh.

3. Termin  $\uparrow$

Zum Schluss

**Satz 14.6** : (Differenzierbarkeit)

Für  $f \in C^0([a, \infty) \times [c, d])$  gelte:

i)  $\frac{\partial f}{\partial t} \in C^0([a, \infty) \times [c, d])$

ii)  $\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$  glm. konvergiert

bzgl.  $t \in [c, d]$

iii)  $\int_a^{\infty} f(x, c) dx$  existiert

- 46 -

Dann ist  $F(t) := \int_a^\infty f(x, t) dx$

für alle  $t \in [c, d]$  definiert und

diff'bar mit

$$F'(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Beweis: nach dem Muster von 14.4 + 5 !

□

noch ein Beispiel: Integral von Dirichlet

Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(Courant,  
Diff. u.  
Int.rechnung  
Bd 1, p. 220)

Beweis: Wahl eines Parameters

$$f(x, t) := e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x},$$

$$t \gg 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

mit stetiger Ergänzung in  $x = 0$ ;

Vorläufige Beschränkung auf  
 $t \in [c, d]$  mit  $c > 0$ ,

da dann

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx = - \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

gleichmäßig bzgl.  $t \in [c, d]$  konvergiert;

außerdem existiert

$$\int_0^{\infty} f(x, t) dx = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

für solche  $t$  (vgl. voriges Beispiel);  
 (bzw. Beispiel nach 24. 14.1)

Satz 14.6  $\implies \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx =$

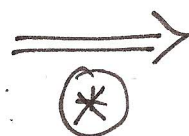
(\*)

$$-\int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot \sin x \, dx, \quad t \in [c, d]$$

-48-

r. S. von (\*)  $\stackrel{\text{2 malige part. Int.}}{=} \underline{\text{wie im vorigen Bspl.}}$

$$-\frac{1}{1+t^2}$$



$$\int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} \, dx = \text{const} - \arctan t \quad (**)$$

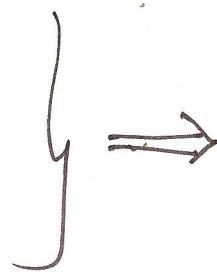
für  $t > 0$  (da  $0 < c < d$  beliebig)

mit einer Integrationskonstanten;

$t = 1$  (voriges Bspl.!)  $\Rightarrow$

$$\text{l. S. von } (***) = \pi/4,$$

$$\text{r. S. von } (***) = \text{const} - \pi/4$$



$$\text{const} = \pi/2;$$

nun betrachte  $t \downarrow 0$  in  $(**)$  (l.S.  
und r. S. sind stetig in  $t = 0$ )  
 $\Rightarrow$  Beh. □

Zum Schluss : Gamma - Funktion

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

Beobachtung: Für  $t \in (0, 1)$  ist das  
Integral auch an der unteren Grenze 0  
uneigentlich. Gemäß Konvention aus §12

zerlegt man formal

$$(*) \quad \int_0^{\infty} \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^{\infty} \dots$$

und diskutiert die Integrale rechts separat.

**Satz**: (a)  $\Gamma$  ist  $C^{\infty}$  auf  $\mathbb{R}^+$  mit

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$$

(b) Funktionalgleichung:

$$\Gamma(t+1) = t \Gamma(t) \quad \forall t > 0$$

speziell:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c)  $\phi(t) := \ln(\Gamma(t))$  erfüllt

$$\phi(t+1) - \phi(t) = \ln t, \quad t > 0$$

Bem: 1.) Nach (b) ist  $\Gamma(t)$  eine  
Fortsetzung von  $n \mapsto n!$  auf  $\mathbb{R}^+$

( $\leadsto$  Zahlentheorie)

2.)  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , folgt

aus der allgemeinen Funktionalgleichung  
unter Beachtung von  $\Gamma(1) = 1$ .

Beweis: (Blatt 3, A5!)

1. Wohldefiniertheit von  $\Gamma$ :

vgl. die Diskussion am Ende von § 12  
der beiden uneigentlichen Integrale rechts

in  $\textcircled{*}$

2. zu (a): wähle zunächst  $t \in [c, d]$

mit beliebigen Zahlen  $0 < c < d < \infty$ ;

dann benutze Satz 14.6 für die beiden

Integrale rechts in  $(*)$

3. zu (b): führe in  $\Gamma(t+1) := \dots$

eine partielle Integration aus.

Wichtig: alle Voraussetzungen verifizieren!



§15

Entwicklung nach

-53-

speziellen Funktionen:

Taylor - und Fourier - Reihen

Idee : Sei  $I$  ein offenes Intervall  
und  $f$  "eine Funktion" auf  $I$ .

Suche eine Entwicklung

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

(evtl. nur in der Nähe eines Punktes  $a \in I$ )

mit

- einfach zu berechnenden  $f_n$
- schneller und -guter Konvergenz

$$\sum_{n=1}^N f_n \longrightarrow f$$



# Probleme

- ①  $T_a \varphi$  kann auf  $\mathbb{R}$  konvergieren,  
hat aber mit  $\varphi$  nichts zu tun

Beispiel (vor Satz 11.6):

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/|x|}, & x \neq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow T_0 \varphi \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}, \text{ aber } \varphi \neq 0.$$

- ②  $\varphi$  ist  $C^\infty(I)$ , aber  $T_a \varphi$   
konvergiert nur in  $a$

Beispiel:  $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x),$  -56-

$$x \in \mathbb{R}, \quad a := 0$$

beachte:  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty, \quad |2^{-n} \cos(n^2 x)| \leq 2^{-n}$

Korollar  
 $\implies \sum_{n=1}^N 2^{-n} \cos(n^2 \cdot) \implies \varphi$   
 zu 13.1

auf  $\mathbb{R}$  und  $\boxed{\varphi \text{ stetig}};$

analog für alle Ableitungen der Partialsummen (Begründung!)  $\implies \boxed{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})}$

nun rechne nach (Übung):

$$\begin{cases} \varphi^{(2k+1)}(0) = 0, \\ \varphi^{(2k)}(0) > \frac{n^{4k}}{2^n} \quad \forall n \end{cases}$$

Für die Glieder von  $T_0 \neq$  folgt

$$k \in \mathbb{N}, x \neq 0: \quad \left| \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right| > \frac{\binom{2}{n^2} |x|^{2k}}{(2k)! 2^n}$$

$\forall n$

Wähle  $n = 2k \implies$

$$\left| \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right| > \frac{\binom{2}{4k^2} |x|^{2k}}{(2k)! 2^{2k}}$$

$$= \frac{2^{2k} (2k)^{2k} k^{2k} |x|^{2k}}{2^{2k} (2k)!} \gg \frac{k^{2k} |x|^{2k}}{1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

D.h.: Die Glieder von  $T_0 \neq$  bilden keine  
Nullfolge.

Ob und wo  $T_{a,f}$  konvergiert, entscheidet das

Restglied:

$$R_n(x) := R_{n,a} f(x) := f(x) - T_{n,a} f(x)$$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

wobei

$$T_{n,a} f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k$$

Taylor-Polynom von  $f$  der  
Ordnung  $n$  in  $a$

Wir haben gezeigt (Satz 11.15)

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (x-a)^{n+1}$$

für ein  $c$  zwischen  $x$  und  $a$

(Restgliedformel von Lagrange)

Beispiel (zur Motivation anderer Restgliedformeln) :

Sei  $\varphi(x) := \ln(1+x)$ ,  $x > -1$ .

Wähle  $a = 0$  und beachte

$$\varphi^{(n+1)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{(1+t)^{n+1}}, \quad t > -1$$

Lagrange  $\Rightarrow R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} n! (-1)^n \left( \frac{x}{1+c} \right)^{n+1}$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \left( \frac{x}{1+c} \right)^{n+1}$$

für  $x > -1$  mit Zwischenstelle  $c$  zwischen  $0$  und  $x$ .

Fall 1 :  $x > 0 \Rightarrow c \in (0, x)$

offenbar :  $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  , falls

$$\boxed{\frac{x}{1+c} \leq 1} \quad (*)$$

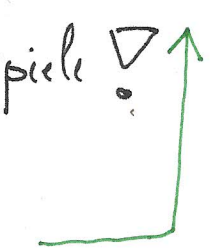
Da die unbekannte Zwischenstelle sehr nahe an 0 liegen kann, folgt :  $(*)$  ist sicher richtig,

falls  $x \leq 1$  .

Ergebnis :  $\left\| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 , \\ \text{d.h.} \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} x^k \end{array} \right.$

Feststellung : die Reihe konvergiert auf  $(-1, 1]$ .

Stellt sie dort  $x \mapsto \ln(1+x)$  dar? Vorsicht

ist angebracht, man denke an die Gegenbeispiele ! 

Termin 4